# МЕХАНИКА
# MECHANICS





УДК 539.47
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-14-23

*Научная статья*



## Анализ напряженно-деформированного состояния радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы с закрепленной боковой поверхностью

**Н. К. Ахмедов**[1] ✉, **С. М. Юсубова**[2]
[1]Азербайджанский государственный экономический университет (UNEC) (Баку, Азербайджан)
[2]Лицей имени Гейдара Алиева (Баку, Азербайджан)
✉ anatiq@gmail.com

***Введение.*** В статье изучается осесимметричная задача теории упругости для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной незамкнутой сферы, не содержащей ни один из полюсов 0 и $\pi$. Считается, что модули упругости являются линейными функциями от радиуса сферы. Предполагается, что боковая поверхность сферы закреплена, а на конических сечениях заданы произвольные напряжения, оставляющие сферу в равновесии.
Целью данной работы является асимптотический анализ задачи теории упругости для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины и исследование на базе этого анализа трехмерного напряженно-деформированного состояния.
***Материалы и методы.*** На основе уравнений теории упругости методом однородных решений и асимптотического анализа исследуется трехмерное напряженно-деформированное состояние радиально-неоднородной сферы.
***Результаты исследования.*** После выполнения однородных граничных условий, заданных на боковых поверхностях сферы, получено характеристическое уравнение и произведена классификация его корней относительно малого параметра, характеризующего толщину сферы. Построены соответствующие асимптотические решения, зависящие от корней характеристического уравнения. Показано, что решения, соответствующие счетному множеству корней, имеют характер пограничного слоя, локализованного в конических срезах. Разветвление корней порождает новые решения, которые характерны только для трансверсально-изотропной радиально-неоднородной сферы. Появляется слабозатухающее погранслойное решение, которое может проникать глубоко вдали от конических сечений и изменять картину напряженно-деформированного состояния.
***Обсуждение и заключения.*** На основе построенных решений можно определить области применимости существующих прикладных теорий и предложить новую более уточненную прикладную теорию для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки.

***Ключевые слова:*** уравнения равновесия, уравнения Лежандра, радиально-неоднородная сфера, характеристические уравнение, погранслойные решения, вариационный принцип, прикладная теория, метод редукции.

***Для цитирования***: Ахмедов, Н. К Анализ напряженно-деформированного состояния радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы с закрепленной боковой поверхностью / Н. К. Ахмедов, С. М. Юсубова // Advanced Engineering Research. — 2022. — Т. 22, № 1. — С. 14–23. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-14-23





Original article

# Analysis of the stress-strain state of a radially inhomogeneous transversely isotropic sphere with a fixed side surface

**Natiq K. Akhmedov**[1] ✉, **Sevinj M. Yusubova**[2]
[1]Azerbaijan State University of Economics (UNEC) (Baku, Azerbaijan)
[2]G. Aliyev Lyceum (Baku, Azerbaijan)
✉ anatiq@gmail.com

***Introduction.*** The paper considers an axisymmetric problem of elasticity theory for a radially inhomogeneous transversally isotopic nonclosed sphere containing none of the 0 and $\pi$ poles. It is believed that the elastic moduli are linear functions of the radius of the sphere. It is assumed that the side surface of the sphere is fixed, and arbitrary stresses are given on the conic sections, leaving the sphere in equilibrium. The work objective is an asymptotic analysis of the problem of elasticity theory for a radially inhomogeneous transversally isotropic sphere of small thickness, and a study of a three-dimensional stress-strain state based on this analysis.
***Materials and Methods.*** The three-dimensional stress-strain state is investigated on the basis of the equations of elasticity theory by the method of homogeneous solutions and asymptotic analysis.
***Research Results.*** After the homogeneous boundary conditions set on the side surfaces of the sphere are met, a characteristic equation is obtained, and its roots are classified with respect to a small parameter characterizing the thickness of the sphere. The corresponding asymptotic solutions depending on the roots of the characteristic equation are constructed. It is shown that the solutions corresponding to a countable set of roots have the character of a boundary layer localized in conic slices. The branching of the roots generates new solutions that are characteristic only for a transversally isotropic radially inhomogeneous sphere. A weakly damping boundary layer solution appears, which can penetrate deep away from the conical sections and change the picture of the stress-strain state.
***Discussion and Conclusions.*** Based on the solutions constructed, it is possible to determine the applicability areas of existing applied theories and propose a new more refined applied theory for a radially inhomogeneous transversally isotropic spherical shell.

***Keywords****:* equilibrium equations, Legendre equations, radially inhomogeneous sphere, characteristic equation, boundary layer solutions, variational principle, applied theory, reduction method.

***For citation:*** Akhmedov N. K., Yusubova S. M. Analysis of the stress-strain state of a radially inhomogeneous transversely isotropic sphere with a fixed side surface. Advanced Engineering Research, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 14–23. (In Russ). https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-1-14-23

**Введение.** Одним из свойств материалов, влияющих на напряженно-деформированное состояние упругих тел, является их неоднородность. Изучение напряженно-деформированного состояния неоднородных тел на основе трехмерных уравнений теории упругости связано со значительными математическими трудностями.

Исследованию трехмерных задач теории упругости для сферы посвящен ряд исследований.

В работе [1] на основе уравнений теории упругости для сферы получено общее решение, удовлетворяющее граничным условиям на контуре в смысле Сен-Венана, проведен анализ напряженно-деформированного состояния сферы. В [2] на основе уравнений теории упругости для толстой изотропной сферы построены однородные решения, зависящие от корней трансцендентного уравнения. В [3] на основе решения трехмерных задач теории упругости для сферы малой толщины изучена точность существующих прикладных теорий и дан метод построения уточненных прикладных теорий. В [4] изложена трехмерная асимптотическая теория трансверсально-изотропной сферической оболочки малой толщины. В [5] приведен анализ трехмерного напряженно-деформированного состояния трехслойной сферы с мягким заполнителем. В [6] методом однородных решений изучена задача кручения для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины, когда упругие характеристики меняются линейным, квадратичным и обратно квадратичным законами по радиусу. В [7] изучена задача кручения для радиально-слоистой сферы с произвольным числом чередующихся жестких и мягких слоев. Показано существование слабозатухающих погранслойных решений и возможное нарушение принципа Сен-Венана в его классической формулировке. Построена прикладная теория кручения радиально-слоистой сферы, адекватно учитывающая возникающие особенности. В [8] с помощью метода конечных элементов и сплайн-коллокации исследована задача теории упругости для радиально-неоднородного полого шара. Проведено сравнение результатов, полученных методами конечных элементов и сплайн-коллокации. В [9] методом асимптотического интегрирования

уравнений теории упругости изучена осесимметричная задача теории упругости для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины. Построены неоднородные и однородные решения. Установлен характер напряженно-деформированного состояния. В [10] методом однородных решений рассмотрена осесимметричная задача теории упругости для сферы малой толщины с переменными модулями упругости. Получены асимптотические формулы для перемещений и напряжений, позволяющие рассчитать трехмерное напряженно-деформированное состояние радиально-неоднородной сферы.

**Материалы и методы.** Рассматривается деформация в рамках линейной теории упругости незамкнутой сферы, материал которой является неоднородным по радиальной координате и трансверсально-изотропным. Толщина полой сферы предполагается малой, по сравнению с радиусом и размером по дуговой координате. Рассматриваются граничные условия, позволяющие решать задачу в осесимметричной постановке. Предполагаем, что сфера не содержит ни один из полюсов $0$ и $\pi$. В сферической системе координат область, занятую сферой, обозначим через $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \quad \theta \in [\theta_1; \theta_2], \ \phi \in [0; 2\pi]\}$.

Рассматривается линейная зависимость упругих свойств материала по радиусу:

$$A_{11} = a_{11}^{(0)} r, \quad A_{12} = a_{12}^{(0)} r, \quad A_{22} = a_{22}^{(0)} r, \quad A_{23} = a_{23}^{(0)} r, \quad A_{44} = a_{44}^{(0)} r, \tag{1}$$

где, $a_{11}^{(0)}, a_{12}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, a_{23}^{(0)}, a_{44}^{(0)}$ — некоторые постоянные величины.

Система уравнений равновесия при отсутствии массовых сил в сферической системе координат $r, \theta, \phi$ имеет вид [11]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta} ctg\theta}{r} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) ctg\theta}{r} = 0, \tag{3}$$

где, $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{\theta\theta}$ — компоненты тензора напряжений, которые выражаются через компоненты вектора перемещений $\upsilon_r = \upsilon_r(r, \theta), \ \upsilon_\theta = \upsilon_\theta(r, \theta)$ следующим образом [4]:

$$\sigma_{rr} = A_{11}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \frac{A_{12}}{r}\left(\upsilon_\theta ctg\theta + 2\upsilon_r + \frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \theta}\right), \tag{5}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = A_{12}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\left(A_{22} + A_{23}\right)\upsilon_r + A_{22}\upsilon_\theta ctg\theta + A_{23}\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \theta}\right], \tag{6}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_{12}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[(A_{22} + A_{23})\upsilon_r + A_{23}\upsilon_\theta ctg\theta + A_{22}\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial \theta}\right], \tag{7}$$

$$\sigma_{r\theta} = A_{44}\left(\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial r} - \frac{\upsilon_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_r}{\partial \theta}\right). \tag{8}$$

Подставляя (5)–(8) в (2)–(3), с учетом (1) получаем уравнения равновесия в перемещениях.

$$\begin{cases} b_{11}^{(0)}\left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\right) + 2\left(2b_{12}^{(0)} - b_{22}^{(0)} - b_{23}^{(0)}\right)\varepsilon^2 u_\rho + \left(2b_{12}^{(0)} - b_{23}^{(0)} - b_{22}^{(0)} - b_{44}^{(0)}\right)\times \\ \times\varepsilon^2\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta ctg\theta\right) + \varepsilon\left(b_{44}^{(0)} + b_{12}^{(0)}\right)\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} ctg\theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\partial\rho}\right) + \varepsilon^2 b_{44}^{(0)}\left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} ctg\theta\right) = 0, \quad (9) \\ b_{44}^{(0)}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - 3\varepsilon^2 u_\theta + \varepsilon\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial\theta}\right) + \left(3b_{44}^{(0)} + b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)}\right)\varepsilon^2\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \\ +\varepsilon^2 b_{22}^{(0)}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} ctg\theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}\right) + \varepsilon b_{12}^{(0)}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial\theta} - \varepsilon^2\left(b_{22}^{(0)} ctg^2\theta + b_{23}^{(0)}\right)u_\theta = 0. \quad (10) \end{cases}$$

Здесь $\rho = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ — новый безразмерный переменный; $\varepsilon = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ — малый параметр, характеризующий толщину сферы; $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$; $\rho \in [-1; 1]$; $u_\rho = \frac{\upsilon_r}{r_0}, \ u_\theta = \frac{\upsilon_\theta}{r_0}, \ b_{ij}^{(0)} = \frac{a_{ij}^{(0)} r_0}{G_0}$ — безразмерные величины; $G_0$ — некоторый параметр, имеющий размерность модуля упругости.

Предполагаем, что боковая часть границы сферы закреплена, т.е.

$$u_\rho\Big|_{\rho=\pm1}=0, \tag{11}$$

$$u_\theta\Big|_{\rho=\pm1}=0\,. \tag{12}$$

Считаем, что на торцах сферы (на конических срезах) заданы напряжения

$$\sigma_{\theta\theta}\Big|_{\theta=\theta_3}=f_{1s}(\rho),\qquad \sigma_{\rho\theta}\Big|_{\theta=\theta_s}=f_{2s}(\rho). \tag{13}$$

Здесь $f_{1s}(\rho),\ f_{2s}(\rho)\ (s=1;2)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Решения (9), (10) ищем в виде [3, 4]:

$$u_\rho(\rho,\theta)=a(\rho)m(\theta);\quad u_\theta(\rho,\theta)=d(\rho)m'(\theta), \tag{14}$$

где функция $m(\theta)$ удовлетворяет уравнению Лежандра:

$$m''(\theta)+ctg\theta\cdot m'(\theta)+\left(z^2-\frac{1}{4}\right)m(\theta)=0. \tag{15}$$

После подстановки (14) в (9), (10), (11), (12) с учетом (15) получаем:

$$\begin{gathered}b_{11}^{(0)}a''(\rho)+2\varepsilon b_{11}^{(0)}a'(\rho)+\varepsilon^2\left[\left(4b_{12}^{(0)}-2b_{22}^{(0)}-2b_{23}^{(0)}\right)-\left(z^2-\frac{1}{4}\right)b_{44}^{(0)}\right]a(\rho)-\\-\left(z^2-\frac{1}{4}\right)\varepsilon\left[\left(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\right)d'(\rho)-\varepsilon\left(b_{44}^{(0)}+b_{22}^{(0)}+b_{23}^{(0)}-2b_{12}^{(0)}\right)d(\rho)\right]=0,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}b_{44}^{(0)}\left(d''(\rho)+2\varepsilon d'(\rho)\right)-\varepsilon^2\left[\left(z^2-\frac{1}{4}\right)b_{22}^{(0)}+\left(b_{23}^{(0)}-b_{22}^{(0)}+3b_{44}^{(0)}\right)\right]d(\rho)+\\+\varepsilon^2\left(3b_{44}^{(0)}+b_{22}^{(0)}+b_{23}^{(0)}\right)a(\rho)+\varepsilon\left(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\right)a'(\rho)=0,\end{gathered} \tag{17}$$

$$a(\rho)=0,\ \text{при}\ \rho=\pm1. \tag{18}$$

$$d(\rho)=0,\ \text{при}\ \rho=\pm1. \tag{19}$$

Решение системы (16), (17) имеет вид:

$$a(\rho)=e^{-\varepsilon\rho}\left[p_1e^{\varepsilon s_1\rho}C_1+p_1e^{-\varepsilon s_1\rho}C_2+p_2e^{\varepsilon s_2\rho}C_3+p_2e^{-\varepsilon s_2\rho}C_4\right], \tag{20}$$

$$d(\rho)=e^{-\varepsilon\rho}\left[t_1e^{\varepsilon s_1\rho}C_1+q_1e^{-\varepsilon s_1\rho}C_2+t_2e^{\varepsilon s_2\rho}C_3+q_2e^{-\varepsilon s_2\rho}C_4\right], \tag{21}$$

где $C_n\ (n=\overline{1,4})$ — произвольные постоянные,

$p_k=b_{44}^{(0)}s_k^2-\left(z^2-\frac{1}{4}\right)b_{22}^{(0)}+\left(b_{22}^{(0)}-b_{23}^{(0)}-4b_{44}^{(0)}\right)$;

$t_k=-\left(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\right)s_k-\left(2b_{44}^{(0)}+b_{22}^{(0)}+b_{23}^{(0)}-b_{12}^{(0)}\right)$;

$q_k=\left(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\right)s_k-\left(2b_{44}^{(0)}+b_{22}^{(0)}+b_{23}^{(0)}-b_{12}^{(0)}\right)$; $s_k$ — корни уравнения

$$\begin{gathered}b_{11}^{(0)}b_{44}^{(0)}s^4+\left[\left(z^2-\frac{1}{4}\right)\left((b_{12}^{(0)})^2+2b_{44}^{(0)}b_{12}^{(0)}-b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}\right)+b_{11}^{(0)}b_{22}^{(0)}-5b_{11}^{(0)}b_{44}^{(0)}+4b_{12}^{(0)}b_{44}^{(0)}-\right.\\\left.-2b_{22}^{(0)}b_{44}^{(0)}-b_{11}^{(0)}b_{23}^{(0)}-2b_{23}^{(0)}b_{44}^{(0)}\right]s^2+\left[\left(z^2-\frac{1}{4}\right)b_{44}^{(0)}-4b_{12}^{(0)}+2b_{22}^{(0)}+2b_{23}^{(0)}+b_{11}^{(0)}\right]\times\\\times\left[\left(z^2-\frac{1}{4}\right)b_{22}^{(0)}+b_{23}^{(0)}-b_{22}^{(0)}+4b_{44}^{(0)}\right]-\left(z^2-\frac{1}{4}\right)\left(2b_{44}^{(0)}+b_{22}^{(0)}+b_{23}^{(0)}-b_{12}^{(0)}\right)^2=0.\end{gathered} \tag{22}$$

Система линейных алгебраических уравнений относительно $C_1,C_2,C_3,C_4$, получается путем удовлетворения однородным граничным условиям (18), (19). Равенство нулю определителя этой системы является условием существования ненулевых решений и приводит к характеристическому уравнению относительно спектрального параметра $z$:

$$\begin{gathered}\Delta(z;\varepsilon)=\left(p_1q_2-p_2q_1\right)\left(t_1p_2-t_2p_1\right)sh^2\left(\varepsilon\left(s_1+s_2\right)\right)+\\+\left(p_1t_2-p_2q_1\right)\left(p_1q_2-p_2t_1\right)sh^2\left(\varepsilon\left(s_2-s_1\right)\right)=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Уравнение (23) имеет счетное множество корней $z_k$. Общее решение задачи получается путем суммирования по корням уравнения (23)

$$u_\rho=\sum_{k=1}^{\infty}M_ka_k(\rho)m_k(\theta), \tag{24}$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} M_k d_k(\rho) m_k'(\theta), \tag{25}$$

где

$$a_k(\rho) = e^{-\varepsilon\rho}\left[p_1\left(e^{\varepsilon s_1\rho}\omega_1 - e^{-\varepsilon s_1\rho}\omega_2\right) + p_2\left(e^{\varepsilon s_2\rho}\omega_3 - e^{-\varepsilon s_2\rho}\omega_4\right)\right],$$

$$d_k(\rho) = e^{-\varepsilon\rho}\left[t_1 e^{\varepsilon s_1\rho}\omega_1 - q_1 e^{-\varepsilon s_1\rho}\omega_2 + t_2 e^{\varepsilon s_2\rho}\omega_3 - q_2 e^{-\varepsilon s_2\rho}\omega_4\right],$$

$$\omega_1 = p_2 q_1\left(q_2 - t_2\right)e^{e s_1} - t_2\left(p_1 q_2 - p_2 q_1\right)e^{-\varepsilon(s_1+2s_2)} + q_2\left(p_1 t_2 - p_2 q_1\right)e^{\varepsilon(2s_2-s_1)},$$

$$\omega_2 = p_2 t_1\left(q_2 - t_2\right)e^{-e s_1} - t_2\left(p_1 q_2 - p_2 t_1\right)e^{\varepsilon(s_1-2s_2)} + q_2\left(p_1 t_2 - p_2 t_1\right)e^{\varepsilon(s_1+2s_2)},$$

$$\omega_3 = t_1\left(p_1 q_2 - p_2 q_1\right)e^{-\varepsilon(2s_1+s_2)} - q_1\left(p_1 q_2 - p_2 t_1\right)e^{\varepsilon(2s_1-s_2)} + p_1 q_2\left(q_1 - t_1\right)e^{\varepsilon s_2},$$

$$\omega_4 = t_1\left(p_1 t_2 - p_2 q_1\right)e^{\varepsilon(s_2-2s_1)} - q_1\left(p_1 t_2 - p_2 t_1\right)e^{\varepsilon(2s_1+s_2)} + p_1 t_2\left(q_1 - t_1\right)e^{-\varepsilon s_2}.$$

Множество корней уравнения (23) при $\varepsilon \to 0$ состоит из счетных множеств корней

$$z_k = \frac{\delta_{0k}}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \tag{26}$$

Для $\delta_{0k}$ имеем:

$1^0$. При $b_1 > 0,\ \ b_1^2 - b_2 > 0$:

$$\left(s_1 - s_2\right)\left(b_{44}^{(0)} - b_{11}^{(0)} s_1 s_2\right)\sin\left(\left(s_1 + s_2\right)\delta\right) \pm \left(s_1 + s_2\right)\left(b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1 s_2\right)\sin\left(\left(s_1 - s_2\right)\delta\right) = 0, \tag{27}$$

где

$$s_1 = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2}};\quad s_2 = \sqrt{b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2}};$$

$$b_1 = \left(2b_{44}^{(0)} b_{11}^{(0)}\right)^{-1}\left(2b_{44}^{(0)} b_{12}^{(0)} + (b_{12}^{(0)})^2 - b_{11}^{(0)} b_{22}^{(0)}\right);\ b_2 = b_{22}^{(0)} (b_{11}^{(0)})^{-1}.$$

$2^0$. При $b_1 > 0,\ \ b_1^2 - b_2 < 0$:

$$\begin{gathered}\beta\left[2b_{11}^{(0)}\alpha^2 - \left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2 - \beta^2\right) - b_{44}^{(0)}\right)\right] sh\left(2\delta\alpha\right) \pm \\ \pm\alpha\left[2b_{11}^{(0)}\beta^2 + \left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2 - \beta^2\right) - b_{44}^{(0)}\right)\right]\sin\left(2\delta\beta\right) = 0,\end{gathered} \tag{28}$$

где

$$s_1 = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2}} = \pm(\alpha + i\beta);$$

$$s_2 = \sqrt{b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2}} = \pm(\alpha - i\beta).$$

$3^0$. При $b_1 > 0,\ \ b_1^2 = b_2$:

$$\left(b_{11}^{(0)} s^2 - b_{44}^{(0)}\right)\sin\left(2s\delta\right) \pm 2\left(b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)}\right)\delta s = 0, \tag{29}$$

где $s = \sqrt{b_1}$.

$4^0$. При $b_1 < 0,\ \ b_1^2 - b_2 > 0$:

$$\left(s_1 - s_2\right)\left(b_{44}^{(0)} - b_{11}^{(0)} s_1 s_2\right) sh\left(\left(s_1 + s_2\right)\delta\right) \pm \left(s_1 + s_2\right)\left(b_{44}^{(0)} + b_{11}^{(0)} s_1 s_2\right) sh\left(\left(s_1 - s_2\right)\delta\right) = 0, \tag{30}$$

где

$$s_1 = \sqrt{|b_1| - \sqrt{b_1^2 - b_2}};\quad s_2 = \sqrt{|b_1| + \sqrt{b_1^2 - b_2}}.$$

$5^0$. При $b_1 < 0,\ \ b_1^2 - b_2 < 0$:

$$\begin{gathered}\beta\left[2b_{11}^{(0)}\alpha^2 - \left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2 - \beta^2\right) - b_{44}^{(0)}\right)\right]\sin\left(2\delta\alpha\right) \pm \\ \pm\alpha\left[2b_{11}^{(0)}\beta^2 + \left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2 - \beta^2\right) - b_{44}^{(0)}\right)\right] sh\left(2\delta\beta\right) = 0,\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$s_1 = \sqrt{|b_1| - \sqrt{b_1^2 - b_2}} = \pm(\alpha - i\beta);\quad s_2 = \sqrt{|b_1| + \sqrt{b_1^2 - b_2}} = \pm(\alpha + i\beta).$$

$6^0$. При $b_1 < 0,\ \ b_1^2 = b_2$:

$$\left(b_{11}^{(0)} s^2 - b_{44}^{(0)}\right) sh\left(2s\delta\right) \pm 2\left(b_{11}^{(0)} s^2 + b_{44}^{(0)}\right)\delta s = 0, \tag{32}$$

где $s=\sqrt{|b_1|}$.

Уравнение (27)–(32) имеет счетное множество решений.

Приведем асимптотическое построение решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения (23). Подставляя (26) в (24), (25) и, раскладывая полученные выражения по степеням $\varepsilon$, имеем:

$1^0$.

$$\text{а) } u_p(\rho;\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(1)}\delta_k^5\Big\{\big(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\big)\Big[\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_2^2\big)s_1\cos(\delta_k s_2)\sin(\delta_k s_1\rho)-$$

$$-\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_1^2\big)s_2\cos(\delta_k s_1)\sin(\delta_k s_2\rho)\Big]+O(\varepsilon)\Big\}m_k(\theta), \tag{33}$$

$$u_\theta(\rho;\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(1)}\delta_k^4\Big\{\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_1^2\big)\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_2^2\big)\big[\cos(\delta_k s_2)\cos(\delta_k s_1\rho)-\cos(\delta_k s_1)\cos(\delta_k s_2\rho)\big]+O(\varepsilon)\Big\}m_k'(\theta), \tag{34}$$

где $\delta_{0k}$ являются решениями уравнения

$$(s_1-s_2)\big(b_{44}^{(0)}-b_{11}^{(0)}s_1s_2\big)\sin((s_1+s_2)\delta)+(s_1+s_2)\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_1s_2\big)\sin((s_1-s_2)\delta)=0 \tag{35}$$

$$\text{б) } u_p(\rho;\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(2)}\delta_k^5\Big\{\big(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\big)\Big[\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_2^2\big)s_1\sin(\delta_k s_2)\cos(\delta_k s_1\rho)-$$

$$-\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_1^2\big)s_2\sin(\delta_k s_1)\cos(\delta_k s_2\rho)\Big]+O(\varepsilon)\Big\}m_k(\theta), \tag{36}$$

$$u_\theta(\rho;\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(2)}\delta_k^4\Big\{\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_1^2\big)\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_2^2\big)\big[\sin(\delta_k s_1)\sin(\delta_k s_2\rho)-\sin(\delta_k s_2)\sin(\delta_k s_1\rho)\big]+O(\varepsilon)\Big\}m_k'(\theta), \tag{37}$$

где $\delta_{0k}$ являются решениями уравнения

$$(s_1-s_2)\big(b_{44}^{(0)}-b_{11}^{(0)}s_1s_2\big)\sin((s_1+s_2)\delta)-(s_1+s_2)\big(b_{44}^{(0)}+b_{11}^{(0)}s_1s_2\big)\sin((s_1-s_2)\delta)=0\ . \tag{38}$$

$2^0$.

$$\text{а) } u_p(\rho;\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(3)}\delta_k^5\big(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\big)\Big\{\big[\beta\sin(\delta_k\beta\rho)sh(\delta_k\alpha\rho)-\alpha\cos(\delta_k\beta\rho)ch(\delta_k\alpha\rho)\big]\cdot$$

$$\cdot\Big[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\cos(\delta_k\beta)sh(\delta_k\alpha)+\big(b_{11}^{(0)}(\alpha^2-\beta^2)-b_{44}^{(0)}\big)\sin(\delta_k\beta)ch(\delta_k\alpha)\Big]-$$

$$-\big[\alpha\sin(\delta_k\beta\rho)sh(\delta_k\alpha\rho)+\beta\cos(\delta_k\beta\rho)ch(\delta_k\alpha\rho)\big]\cdot$$

$$\cdot\Big[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\sin(\delta_k\beta)ch(\delta_k\alpha)-\big(b_{11}^{(0)}(\alpha^2-\beta^2)-b_{44}^{(0)}\big)\cos(\delta_k\beta)sh(\delta_k\alpha)\Big]+O(\varepsilon)\Big\}m_k(\theta), \tag{39}$$

$$u_\theta(\rho;\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(3)}\delta_k^4\Big\{\Big[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\sin(\delta_k\beta\rho)ch(\delta_k\alpha\rho)-\big(b_{11}^{(0)}(\alpha^2-\beta^2)-b_{44}^{(0)}\big)\times$$

$$\times\cos(\delta_k\beta\rho)sh(\delta_k\alpha\rho)\Big]\Big[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\cos(\delta_k\beta)sh(\delta_k\alpha)+\big(b_{11}^{(0)}(\alpha^2-\beta^2)-b_{44}^{(0)}\big)\sin(\delta_k\beta)ch(\delta_k\alpha)\Big]-$$

$$-\Big[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\cos(\delta\beta_k\rho)sh(\delta_k\alpha\rho)+\big(b_{11}^{(0)}(\alpha^2-\beta^2)-b_{44}^{(0)}\big)\sin(\delta_k\beta\rho)ch(\delta_k\alpha\rho)\Big]\times$$

$$\times\Big[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\sin(\delta_k\beta)ch(\delta_k\alpha)-\big(b_{11}^{(0)}(\alpha^2-\beta^2)-b_{44}^{(0)}\big)\cos(\delta_k\beta)sh(\delta_k\alpha)\Big]+O(\varepsilon)\Big\}m_k'(\theta), \tag{40}$$

где $\delta_{0k}$ являются решениями уравнения

$$\beta\left[2b_{11}^{(0)}\alpha^2-\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\right]sh\left(2\delta\alpha\right)+\alpha\left[2b_{11}^{(0)}\beta^2+\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\right]\sin\left(2\delta\beta\right)=0. \quad (41)$$

б) $$u_p\left(\rho;\theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(4)}\delta_k^5\left(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\right)\Big\{\left[\beta\sin\left(\delta_k\beta\rho\right)ch\left(\delta_k\alpha\rho\right)-\alpha\cos\left(\delta_k\beta\rho\right)sh\left(\delta_k\alpha\rho\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\cos\left(\delta_k\beta\right)ch\left(\delta_k\alpha\right)+\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\sin\left(\delta_k\beta\right)sh\left(\delta_k\alpha\right)\right]-$$

$$-\left[\alpha\sin\left(\delta_k\beta\rho\right)ch\left(\delta_k\alpha\rho\right)+\beta\cos\left(\delta_k\beta\rho\right)sh\left(\delta_k\alpha\rho\right)\right]\left[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\sin\left(\delta_k\beta\right)sh\left(\delta_k\alpha\right)-\right.$$

$$\left.-\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\cos\left(\delta_k\beta\right)ch\left(\delta_k\alpha\right)\right]+O\left(\varepsilon\right)\Big\}m_k\left(\theta\right), \quad (42)$$

$$u_\theta\left(\rho;\theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(4)}\delta_k^4\Big\{\left[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\sin\left(\delta_k\beta\rho\right)sh\left(\delta_k\alpha\rho\right)-\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(\delta_k\beta\rho\right)ch\left(\delta_k\alpha\rho\right)\right]\left[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\cos\left(\delta_k\beta\right)ch\left(\delta_k\alpha\right)+\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\sin\left(\delta_k\beta\right)sh\left(\delta_k\alpha\right)\right]-$$

$$-\left[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\cos\left(\delta\beta_k\rho\right)ch\left(\delta_k\alpha\rho\right)+\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\sin\left(\delta_k\beta\rho\right)sh\left(\delta_k\alpha\rho\right)\right]\times$$

$$\times\left[2\alpha\beta b_{11}^{(0)}\sin\left(\delta_k\beta\right)sh\left(\delta_k\alpha\right)-\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\cos\left(\delta_k\beta\right)ch\left(\delta_k\alpha\right)\right]+O\left(\varepsilon\right)\Big\}m_k'\left(\theta\right), \quad (43)$$

где $\delta_{0k}$ являются решениями уравнения

$$\beta\left[2b_{11}^{(0)}\alpha^2-\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\right]sh\left(2\delta\alpha\right)-\alpha\left[2b_{11}^{(0)}\beta^2+\left(b_{11}^{(0)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)-b_{44}^{(0)}\right)\right]\sin\left(2\delta\beta\right)=0. \quad (44)$$

$3^0$.

а) $$u_p\left(\rho;\theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(5)}\Big\{\left(b_{11}^{(0)}s^2+b_{44}^{(0)}\right)\left(\cos\left(\delta_ks\right)\cos\left(\delta_ks\rho\right)+\rho\sin\left(\delta_ks\right)\sin\left(\delta_ks\rho\right)\right)+$$

$$+\frac{\left(b_{11}^{(0)}s^2-b_{44}^{(0)}\right)}{s\delta_k}\sin\left(\delta_ks\right)\cos\left(\delta_ks\rho\right)+O\left(\varepsilon\right)\Big\}m_k\left(\theta\right), \quad (45)$$

$$u_\theta\left(\rho;\theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(5)}\left\{\frac{\left(b_{11}^{(0)}s^2+b_{44}^{(0)}\right)^2}{\left(b_{44}^{(0)}s^2+b_{12}^{(0)}\right)\delta_ks}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\rho\sin\left(\delta_ks\right)\cos\left(\delta_ks\rho\right)-\cos\left(\delta_ks\right)\sin\left(\delta_ks\rho\right)\right)+O\left(\varepsilon\right)\right\}m_k'\left(\theta\right), \quad (46)$$

где $\delta_{0k}$ являются решениями уравнения

$$\left(b_{11}^{(0)}s^2-b_{44}^{(0)}\right)\sin\left(2s\delta\right)+2\left(b_{11}^{(0)}s^2+b_{44}^{(0)}\right)\delta s=0 \quad (47)$$

б) $$u_\rho\left(\rho;\theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(6)}\left\{\frac{\left(b_{11}^{(0)}s^2-b_{44}^{(0)}\right)}{\delta_ks}\cos\left(\delta_ks\right)\sin\left(\delta_ks\rho\right)-\left(b_{11}^{(0)}s^2+b_{44}^{(0)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sin\left(\delta_ks\right)\sin\left(\delta_ks\rho\right)+\rho\cos\left(\delta_ks\right)\cos\left(\delta_ks\rho\right)\right)+O\left(\varepsilon\right)\right\}m_k\left(\theta\right) \quad (48)$$

$$u_\theta\left(\rho;\theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k^{(6)}\left\{\frac{\left(b_{11}^{(0)}s^2+b_{44}^{(0)}\right)^2}{\left(b_{44}^{(0)}+b_{12}^{(0)}\right)\delta_ks}\times\right.$$

$$\times\left[\rho\cos(\delta_k s)\sin(\delta_k s\rho)-\sin(\delta_k s)\cos(\delta_k s\rho)\right]+O(\varepsilon)\Big\} m_k'(\theta), \tag{49}$$

где $\delta_{0k}$ являются решениями уравнения

$$\left(b_{11}^{(0)}s^2-b_{44}^{(0)}\right)\sin(2s\delta)-2\left(b_{11}^{(0)}s^2+b_{44}^{(0)}\right)\delta s=0 \tag{50}$$

$4^0$. В случае $b_1<0,\ b_1^2-b_2>0$ асимптотические формулы для перемещений получаются из (33)–(38) заменой $s_1, s_2$ на $is_1, is_2$.

$5^0$. В случае $b_1<0,\ b_1^2-b_2<0$ асимптотические формулы для перемещений получаются (39)–(44) заменой $s_1, s_2$ на $is_1, is_2$.

$6^0$. В случае $b_1<0,\ b_1^2=b_2$ все асимптотические формулы для перемещений получаются из (45)–(50) заменой $s$ на $is$

Для корней (26) главный член асимптотического решения уравнения (15) при $\varepsilon\to 0$ принимает вид [9, 10]:

$$m_k(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{-\delta_{0k}^2}}\exp\left[-\varepsilon^{-1}\sqrt{-\delta_{0k}^2}\,(\theta-\theta_1)\right](1+O(\varepsilon));\ \textit{в окрестности}\ \ \theta=\theta_1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{-\delta_{0k}^2}}\exp\left[\varepsilon^{-1}\sqrt{-\delta_{0k}^2}\,(\theta-\theta_2)\right](1+O(\varepsilon));\ \textit{в окрестности}\ \ \theta=\theta_2.\end{cases} \tag{51}$$

Перемещения представим в виде:

$$u_\rho(\rho,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k a_k(\rho)m_k(\theta), \tag{52}$$

$$u_\theta(\rho,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k d_k(\rho)m_k'(\theta). \tag{53}$$

Напряжения $\sigma_{\rho\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ представим в виде:

$$\sigma_{\theta\theta}=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\left(\sigma_{1k}^{(1)}(\rho)m_k(\theta)+\sigma_{1k}^{(2)}(\rho)m_k'(\theta)ctg\theta\right), \tag{54}$$

$$\sigma_{\rho\theta}=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\sigma_{2k}(\rho)m_k'(\theta), \tag{55}$$

здесь

$$\sigma_{1k}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\varepsilon}\left[b_{12}^{(0)}a_k'(\rho)+\varepsilon\left(b_{22}^{(0)}+b_{23}^{(0)}\right)a_k(\rho)-\varepsilon b_{22}^{(0)}\left(z_k^2-\frac{1}{4}\right)d_k(\rho)\right];$$

$$\sigma_{1k}^{(2)}(\rho)=\left(b_{23}^{(0)}-b_{22}^{(0)}\right)d_k(\rho);$$

$$\sigma_{2k}(\rho)=\frac{b_{44}^{(0)}}{\varepsilon}\left[d_k'(\rho)+\varepsilon(a_k(\rho)-d_k(\rho))\right].$$

Характер решений (33)–(50) существенно зависит от типа корней $\delta_{0k}$. Погранслойные первые члены этих решений соответствуют краевому эффекту Сен-Венана [4]. В случае мнимых корней $\delta_{0k}$ эти пограничные слои имеют слабое затухание. Таким образом, напряженно-деформированное состояние достаточно далеко от торцов существенно от них зависит. То есть в этом случае трансверсально-изотропные свойства неоднородного материала значительно, по сравнению изотропным материалом сферы, меняют картину напряженно-деформированного состояния. В то же время, при действительных или комплексных $\delta_{0k}$ картина напряженно-деформированного состояния неоднородной сферы для таких материалов качественно совпадает, различаясь скоростью затухания вышеописанных погранслойных решений Сен-Венана неоднородной плиты.

Из (51) получается, что при удалении от конических сечений $\theta=\theta_j\ (j=1,2)$ решения (33)–(50) экспоненциально убывают.

Поскольку построенные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям на боковой поверхности, вариационный принцип Лагранжа принимает следующий вид [4, 11]:

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(\sigma_{\theta\theta}-f_{1j}(\rho)\right)\delta u_\theta+\left(\sigma_{\rho\theta}-f_{2j}(\rho)\right)\delta u_\rho\right]\Big|_{\theta=\theta_j}e^{2\varepsilon\rho}d\rho=0. \tag{56}$$

Подставляя (52)–(55) в (56) и считая $\delta E_k$ независимыми вариациями, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k q_{jk} = \tau_j, \quad (j = 1, 2, ...), \tag{57}$$

здесь

$$q_{jk} = \int_{-1}^{1} \sigma_{1k}^{(1)}(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \left( \sum_{s=1}^{2} m_k(\theta_s) m_j'(\theta_s) \right) + \int_{-1}^{1} \sigma_{1k}^{(2)}(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \times$$
$$\times \left( \sum_{s=1}^{2} m_k'(\theta_s) m_j'(\theta_s) ctg\theta_s \right) + \int_{-1}^{1} \sigma_{2k}(\rho) a_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \left( \sum_{s=1}^{2} m_k'(\theta_s) m_j(\theta_s) \right),$$
$$\tau_j = \sum_{s=1}^{2} \left[ m_j'(\theta_s) \int_{-1}^{1} f_{1s}^{*}(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho + m_j(\theta_s) \int_{-1}^{1} f_{2s}(\rho) a_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \right].$$

Система (57) всегда разрешима при физически осмысленных условиях, наложенных на правую часть (57). Разрешимость и сходимость метода редукции для (57) доказана в [12].

Используя малость параметра $\varepsilon$, можно построить асимптотические решения системы (57).

**Результаты исследований.** Проведен анализ структуры напряженно-деформированного состояния радиально-неоднородной трансверсально- изотропной сферы малой толщины при кинематических условиях на боковой поверхности. Показано, что, в случае закрепления боковой поверхности, характер решения определяется погранслоями. Оказалось, что асимптотическое разложение напряженного состояния начинается с решения описывающего краевой эффект Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных неоднородных плит. В случае трансверсальной изотропии радиально неоднородного материала сферы некоторые погранслойные решения затухают весьма слабо, могут проникать глубоко вдали от конических сечений и изменять картину напряженно-деформированного состояния. Выведены асимптотические соотношения для перемещений и напряжений, позволяющие рассчитать трехмерное напряженно-деформированное состояние радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины с любой наперед заданной точностью. Показано, что разветвление корней порождает счетное множество новых решений для трансверсально-изотропной радиально-неоднородной сферы.

**Обсуждение и заключения.** Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния неоднородных оболочек, основанный на трехмерных уравнениях теории упругости, позволяет установить границы применения приближенных теорий. Выявленный характер поведения решения вдали от торцов для разных граничных условий на боковых поверхностях может стать основой для создания уточненных прикладных теорий расчета деформирования радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки малой толщины. Одним из приложений проведенного асимптотического анализа может служить расчет оболочек с тонкими покрытиями, в которых возникает при этом радиальная неоднородность [13, 14].

**Библиографический список**


1. Галеркин, Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки / Б. Г. Галеркин // Прикладная математика и механика. — 1942. — Т. 6, № 6. — С. 487–496.

2. Лурье, А. И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки / А. И. Лурье // Прикладная математика и механика. — 1942. — Т. 7, № 6. — С. 393–404.

3. Виленская, Т. В. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины / Т. В. Виленская, И. И. Ворович // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30, № 2. — С. 278–295.

4. Mekhtiyev, M. F. Asymptotic analysis of spatial problems in elasticity. — Springer, 2019. — Vol. 99. — P. 241. https://doi.org/10.1007/978-981-13-3062-9

5. Боев, Н. В. Пространственное напряженно-деформированное состояние трехслойной сферической оболочки / Н. В. Боев, Ю. А. Устинов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1985. — № 3. — С. 136–143.

6. Ахмедов, Н. К. Асимптотическое поведение решения задачи кручения радиально-неоднородного трансверсально-изотропной сферической оболочки / Н. К. Ахмедов, Т. Б. Мамедова // Вестник Донского государственного технического университета. — 2011. — № 4. — С. 455–461.

7. Ахмедов, Н. К. Анализ структуры пограничного слоя в задаче кручения слоистой сферической оболочки / Н. К. Ахмедов, Ю. А. Устинов // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 416–426.

8. Grigorenko, A. Ya. Analysis of the axisymmetric stress-strain state of a continuously inhomogeneous hollow sphere / A. Ya. Grigorenko, N. P. Yaremchenko, S. N. Yaremchenko // International Applied Mechanics. — 2018. — Vol. 54. — P. 577–583. https://doi.org/10.1007/s10778-018-0911-1

9. Akhmedov, N. K. Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres / N. K. Akhmedov, A.H. Sofiyev // Thin-Walled Structures. — 2019. —Vol. 139. — P. 232–241. https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.03.022

10. Akhmedov, N. K. Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric problem of elasticity theory for a sphere with variable elasticity modules / N. K. Akhmedov, N. S. Gasanova // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2020. — Vol. 25. — P. 2231–2251. https://doi.org/10.1177/1081286520932363

11. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. — Москва : Наука, 1970. — 939 с.

12. Устинов, Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю. А. Устинов. — Ростов-на Дону : ЦВВР, 2006. — 257 с.

13. Tolokonnikov, L.A. Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic sphere with an inhomogeneous coating / L.A. Tolokonnikov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2015. — Vol. 79. — P. 467–474. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.03.008

14. Kiani, M. Radially inhomogeneous spherical structures; analysis of EM scattering using Taylor's series method and their potential applications / M. Kiani, A. Abdolali, M. Safari // AEU – International Journal of Electronics and Communications. — 2017. — Vol. 80. — P. 199–209.

Поступила в редакцию 12.01.2022
Поступила после рецензирования 31.01.2022
Принята к публикации 01.02.2022

***Об авторах:***

**Ахмедов Натик Каракиши,** заведующий кафедрой «Математика и статистика», Азербайджанский Государственный Экономический Университет (UNEC) (AZ 1001, Азербайджан, г. Баку, ул. Истиглалият,6), доктор математических наук, Scopus, ORCID, anatiq@gmail.com

**Юсубова Севиндж Мамед,** преподаватель, Лицей имени Гейдара Алиева (AZ 1025, Азербайджан, г. Баку, ул. Н. Алиева 50), sevinc.yusubova.75@mail.ru

*Заявленный вклад соавторов:*

Ахмедов Натик Каракиши — постановка задачи, выбор метода исследования, обсуждение результатов. Юсубова Севиндж Мамед — построение асимптотического решения для задачи с кинематическими граничными условиями на боковых поверхностях, обсуждение результатов, подготовка рукописи.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*